UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DPTO. TERMODINÁMICA Y FENÓMENOS DE TRANSFERENCIA
MÉTODOS APROXIMADOS EN ING. QUÍMICA
TF-1313

ECUACIONES DIFERENCIALES
Problemas de Valor Inicial

Esta guía fue elaborada por:

Prof. Aurelio Stammitti Scarpone

con la ayuda de:

Br. María M. Camacho A.

ECUACIONES DIFERENCIALES
Problemas de Valor Inicial

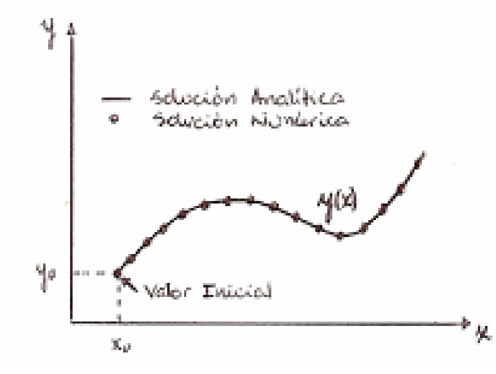
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1$^{\underline{er}}$ Orden (EDO's 1$^{\underline{er}}$ Orden)

Se tiene el problema:

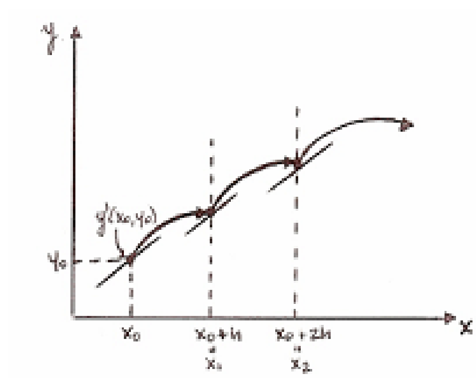
$$y' = f(x,y) \qquad , \qquad y(x_0) = y_0$$

Lo que se desea es encontrar la función *y*=*f*(*x*) tal que satisfaga la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) y la respectiva condición inicial dada. Este tipo de problemas se conoce como Problemas de Valor Inicial (PVI).

Cuando no se puede resolver este problema de forma analítica debe hacerse de forma numérica, lo que se obtendrá en lugar de la función explícita es una tabla de valores x-y que representan a la función. Existe una variedad de métodos, tanto explícitos como implícitos para este problema que utiliza la EDO y la condición inicial para desarrollar la tabla de valores *x*-*y*.



El objetivo de los métodos numéricos diseñados para los PVI es determinar el punto siguiente usando la información de los puntos anteriores y la derivada.



Existen varias familias de métodos, se agrupan en:

- Métodos de un paso: solo utilizan la información del punto anterior para calcular el siguiente.
- Métodos multipaso: utilizan la información de varios puntos anteriores para calcular el siguiente.

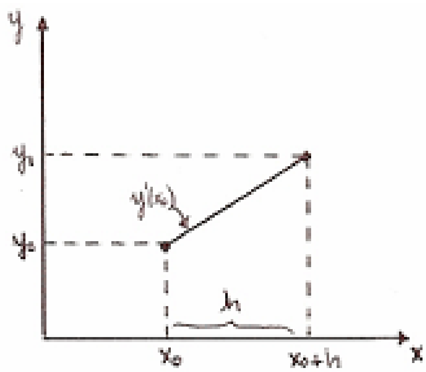
Cada una de estas familias se divide en dos categorías:

- Métodos explícitos: calculan el punto siguiente de forma directa con la información de los puntos previos.
- Métodos implícitos: utilizan un procedimiento iterativo para calcular el punto siguiente usando los puntos previos y el valor estimado del punto nuevo calculado en la iteración anterior.

1.1 Métodos de un Paso Explícitos

- **Método de Euler (Taylor)**

Dado nuestro problema de valor inicial, se utiliza el desarrollo en series de Taylor alrededor del punto (x_0,y_0) truncado en el primer término para calcular el siguiente punto.



$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Básicamente lo que hace es calcular la derivada en el punto conocido y extender la línea recta hasta el 'x' siguiente.

La forma general es: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + O(h^2)$

con: $x_i = x_0 + i \cdot h$ $\quad$ i ∈ [0,n]

La desventaja de este método es que debido a su simplicidad tiene un orden de error de $O(h^2)$, lo que obliga a seleccionar valores muy pequeños de 'h' para obtener buenos resultados.

Ejemplo:

Sea: $y' = \frac{2x}{y} + x^2.e^x$, $y(1) = 0$, $1 \le x \le 1,5$

Para este tipo de problemas es necesario establecer unos límites físicos para la variable independiente 'x', para así definir el intervalo de integración.

Esto es necesario sin importar el método de resolución seleccionado.

Lo más fácil ahora, es dividir el intervalo de integración en un número finito de segmentos y con ello se determina el valor del paso 'h'.

N=5: $$h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow h = \frac{1,5-1}{5} \Rightarrow h = 0,1$$

(N: nº de segmentos o de divisiones de intervalo a,b)

Ahora se crea una tabla:

i	x_i	y_i	$f(x_i,y_i)$	y_{i+1}	$y_i^{analitica}$
0	1	0	2,718282	0,271818	0
1	1,1	0,271828	4,129274	0,684755	0,345920
2	1,2	0,684755	5,922227	1,276978	0,866643
3	1,3	1,276978	8,165693	2,093547	1,607215
4	1,4	2,093547	10,938973	3,187444	2,620360
5	1,5	3,187444	-	-	3,967666

NOTA: para los valores iniciales usados se evalúa la función para obtener nuestro primer renglón.

$$x_0 = 1; y_0 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x_0, y_0) = \frac{2 \cdot 0}{1} + 1^2 \cdot e^1 = 2,718282 \\ y_1 = y0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0 + (0,1) \cdot (2,718282) = 0,271828 \end{array}$$

Para este ejemplo se cuenta con la solución analítica para fines comparativos:

$$y^{analitica}(x) = x^2 \cdot (e^x - e)$$

Como puede verse en la tabla, usando cinco (5) divisiones del intervalo (*N*=5) difieren de forma apreciable de la solución analítica, lo que es la prueba de que este método requiere de valores de '*h*' más pequeños para obtener mejores soluciones.

Cuando no se cuenta con la solución analítica para comparar resultados, lo único que se puede es resolver el problema varias veces con distintos valores de *N* (y en consecuencia de '*h*'). Si los resultados varían mucho, es necesario usar un *N* más grandes ('*h*' muy pequeño) hasta encontrar un valor de *N* para el cual ya no cambien los resultados.

En la práctica, debe usarse *N*=100 como mínimo para tener una buena solución e incluso dependiendo del problema, puede requerirse *N*=1000 o mayores. <u>Esto es válido para todos los métodos explícitos</u>.

- **Métodos de Runge – Kutta**

Ésta es una familia de métodos muy utilizada debido a su gran exactitud. Existen muchas versiones y modificaciones pero todas trabajan bajo el mismo principio básico.

Básicamente todos estos métodos calculan la derivada en un punto conocido y luego hacen alguna modificación a este valor para calcular el punto siguiente. Dependiendo del número de evaluaciones de la derivada ($f(x,y)$) que hagan reciben su nombre.

<u>RK1</u>: una evaluación: es Euler explícito.
<u>RK2</u>: RK que hace dos evaluaciones.
<u>RK4</u>: RK que hace cuatro evaluaciones.
<u>RK6</u>: RK que hace seis evaluaciones (también conocido como RK – Fehlberg).

Los más fáciles de usar son los RK2 y RK4 pero existen varias versiones de este último, la única diferencia es el valor de las constantes usadas en las multiplicaciones.

a) Método RK2 Explícito

Dado $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$.

El método hace uso de dos constantes k_1 y k_2 como sigue:

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i) \; ; \; k_2 = h \cdot f(x_i + h; y_i + k_1)$$

Finalmente:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] + O(h^2)$$

Este método es de segundo (2) orden en el error. Para la evaluación de cada y_{i+1} es necesario evaluar las constantes k_1 y k_2 cada vez.

Ejemplo:

Sea: $y' = \frac{2x}{y} + x^2.e^x$, $y(1) = 0$, $1 \le x \le 1{,}5$

Recordar que es necesario establecer un número de segmentos para elaborar la tabla con los valores de 'x', 'y', 'k_1', 'k_2', 'y_{i+1}' y '$y_i^{\text{analítica}}$'; así como también es importante hallar el valor del paso 'h' como se indica a continuación:

$$N{=}5: \qquad h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow h = 0{,}1$$

(N: nº de segmentos o de divisiones del intervalo a,b)

i	x_i	y_i	k_1	k_2	y_{i+1}	$y_i^{analitica}$
0	1	0	0,2718282	0,4129274	0,3423778	0
1	1,1	0,3423778	0,425755	0,6061189	0,8583148	0,345920
2	1,2	0,8583148	0,621149	0,847721	1,5929202	0,866643
3	1,3	1,5929202	0,865176	1,145976	2,598496	1,607215
4	1,4	2,598496	1,166033	1,510317	3,936671	2,620360
5	1,5	3,936671	-	-	-	3,967666

NOTA: para los valores iniciales usados se evalúa la función para obtener nuestro primer renglón.

$$x_0 = 1; y_0 = 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k_1 = h\cdot f(x_0, y_0) = (0{,}1)\cdot(2{,}718282) = 0{,}2718282 \\ k_2 = h\cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = (0{,}1)\cdot f(1{,}1; 0{,}2718282) = 0{,}4129274 \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] = 0 + \frac{1}{2}\cdot\left[0{,}2718282 + 0{,}4129274\right] = 0{,}3423778 \end{array}$$

Observación: si se comparan resultados del ejercicio resuelto por el método de RK2 explícito y por Euler, puede verse claramente que el de RK2 produce mejores resultados.

b) Método RK4 Explícito

Este método tiene error de $O(h^4)$ y como ya se mencionó, existen variantes, las cuales dependen de la fórmula de integración utilizada, simpson 1/3 y simpson 3/8. Ahora, ambas van a requerir de cuatro coeficientes k_j a evaluar; la diferencia final está en los factores que multiplican a estos k_j.

b.1- Simpson 1/3:

$$\begin{aligned} k_1 &= h\cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h\cdot f(x_i + h; y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right) + O(h^4) \end{aligned}$$

b.2- Simpson 3/8:

$$\begin{aligned} k_1 &= h\cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{3}; y_i + \frac{k_1}{3}\right) \\ k_3 &= h\cdot f\left(x_i + \frac{2h}{3}; y_i + \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3}\right) \\ k_4 &= h\cdot f(x_i + h; y_i + k_1 + k_2 + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right) + O(h^4) \end{aligned}$$

Estas dos versiones ofrecen muy buenos resultados en general, pero siempre dependiente del valor usado de ‘h’.

Ejemplo RK4 Explícito usando Simpson 1/3:

Sea: $y' = \frac{2x}{y} + x^2.e^x$, $y(1) = 0$, $1 \leq x \leq 1,5$

N=5: $h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow h = 0,1$

(N: nº de segmentos o divisiones del intervalo a,b)

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	1	0	0,2718282	0,340944	0,347527	0,426691
1	1,1	0,345910	0,426397	0,514907	0,522604	0,622849
2	1,2	0,866621	0,622534	0,733828	0,742732	0,867704
3	1,3	1,607181	…	…	…	…
4	1,4	2,620311	…	…	…	…
5	1,5	3,967602	-	-	-	-

NOTA: para la tabla, los valores de $y_i^{\text{analítico}}$ son iguales a los de las tablas anteriores.

Aquí puede observarse una coincidencia exacta hasta el cuarto decimal respecto a la solución analítica usando el mismo paso h = 0,1; demostrando así las propiedades de este método.

Debe notarse aquí que se requirió evaluar la función $f(x,y)$ un total de cuatro veces para cada x_i lo que implica un mayor tiempo de cálculo. Sin embargo, la compensación está en que tal vez no se requiera de un paso 'h' extremadamente pequeño, pero eso depende exclusivamente del problema en cuestión.

Modificación del paso '*h*' de Integración

Hemos visto que en todos los métodos de un paso explícitos se utiliza un valor del paso de integración 'h' fijo, que es calculado antes de iniciar el procedimiento de solución.

Sin embargo, es posible modificar el valor del paso '*h*' durante la ejecución de cualquiera de los métodos, pero se necesita una medida del error cometido al usar un valor dado de '*h*'.

Para RK4 se puede usar la siguiente fórmula:

$$e_i = \frac{(k_3 - k_2)^2}{(k_2 - k_1)^2} \text{ ; } evaluado\ para\,(x_i, y_i)\,con\ h\ dado$$

A continuación se presenta el procedimiento de RK4 con paso '*h*' variable.

<u>Procedimiento</u>:

Dado $y' = f(x,y)\,;\, y(x_0) = y_0\,;\, a \le x \le b$

Defino tol, $h_{inicial}$, $x_0 = a$ y $x_{final} = b$

DO WHILE $x_i < x_{final}$

Evaluar $k_1; k_2; k_3; k_4$

$$e_i = \frac{(k_3 - k_2)^2}{(k_2 - k_1)^2}$$

IF $(e_i / h) < tol$ THEN

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2.k_2 + k_3 + k_4)$

$i = i + 1$

ELSEIF $(e_i > tol \cdot h)$ THEN

$h = h/2$ 'Disminuir h'

ELSEIF $(e_i \le tol \cdot h)$ THEN

$h = 2 \cdot h$ 'Aumentar h'

ELSEIF $(h \ge (x_{final} - x_i))$ THEN

$h = x_{final} - x_i$ 'Ajustar al punto final'

END IF

END DO

Se evalúa el siguiente punto solo cuando el resultado de las evaluaciones de los k_j para un valor dado de *h* cumpla con el error.

Sino, se debe reajustar *h*, aumentándolo o disminuyéndolo para cumplir con el criterio de error

Este procedimiento implica repetir varias veces la evaluación de los $k_1; k_2; k_3; k_4$ con distintos valores de ‘h’ hasta cumplir la tolerancia para los ‘x_i’ actual. El IF es el que ajusta el valor de ‘h’ cada vez para cumplir el criterio. Además, este proceso se hasta bastante pesado porque se tienen que hacer muchas más evaluaciones de la función por este procedimiento.

- **Métodos Multipaso Explícitos**

Ya se ha mencionado que estos métodos utilizan la información de varios puntos previos para calcular el siguiente.

Existen principalmente dos métodos:

- Milne
- Adams – Bashford – Moulton

Sin embargo, el primero no ofrece muy buena estabilidad, por lo tanto no es muy recomendado y sólo se hace hincapié en el segundo método.

a) Método de Adams – Bashford – Moulton

Este grupo de métodos calculan el valor del nuevo punto y_{i+1} en dos pasos. Primero utilizan la información de varios puntos para predecir un valor inicial de y_{i+1} llamado $y_{i+1}{}^{P}$. Luego, utilizan este valor en un segundo paso, junto con otros puntos previos, para calcular el valor final corregido $y_{i+1}{}^{C}$.

Dependiendo de la cantidad de puntos previos que usan recibirán sus nombres.

Primero se presentarán las fórmulas de predicción y luego, las respectivas de corrección.

<u>Predicción (Adams – Bashford)</u>

-<u>AB1</u>: 1 punto previo (método de Euler): $y_{i+1}{}^{P} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

-<u>AB2</u>: 2 puntos previos: $y_{i+1}{}^{P} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left[3 \cdot f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right]$

-AB3: 3 puntos previos: $y_{i+1}{}^{P} = y_i + \frac{h}{12} \cdot \left[23 \cdot f(x_i, y_i) - 16 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5 \cdot f(x_{i-2}, y_{i-2})\right]$

-AB4: 4 puntos previos:

$$y_{i+1}{}^{P} = y_i + \frac{h}{24} \cdot \left[55 \cdot f(x_i, y_i) - 59 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37\rangle f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9 \cdot f(x_{i-3}, y_{i-3})\right]$$

Corrección (Adams – Moulton)

Aquí se utilizan los valores predichos arriba.

-AM1: $y_{i+1}{}^{C} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^{P})$

-AM2: $y_{i+1}{}^{C} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^{P}) + f(x_i, y_i)\right]$

-AM3: $y_{i+1}{}^{C} = y_i + \frac{h}{12} \cdot \left[5 \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^{P}) + 8 \cdot f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right]$

-AM4: $y_{i+1}{}^{C} = y_i + \frac{h}{24} \cdot \left[9 \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^{P}) + 19 \cdot f(x_i, y_i) - 5 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})\right]$

Cada fórmula de AM usa la respectiva AB, es decir AB1-AM1, AB2-AM2, AB3-AM3 y AB4-AM4; esta última es la más usada.

Para usar AB4-AM4 es necesario contar con cuatro puntos de la función evaluados previamente. Para esto se puede usar el siguiente procedimiento de cálculo de arranque para obtener los puntos necesarios.

Procedimiento de arranque para AB4-AM4:

Sea $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$

Inicialmente se conoce únicamente el punto (x_0, y_0)

1.- Usar AB1-AM1 para calcular el punto (x_1, y_1), ya que sólo se requiere del conocimiento de un punto previo (x_0, y_0).

2.- Usar AB2-AM2 para calcular el punto (x_2, y_2), con los puntos conocidos, que son (x_0, y_0) y (x_1, y_1).

3.- Usar AB3-AM3 para calcular el punto (x_3, y_3), con los puntos conocidos, que son (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

4.- Finalmente, ya se cuenta con cuatro puntos a saber: (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), por lo tanto, ya es posible usar el AB4-AM4 para calcular el punto (x_4, y_4).

A partir de aquí ya se puede usar AB4-AM4 porque se tienen suficientes puntos previos.

Observación: otra opción para el procedimiento de arranque es calcular los primeros cuatro puntos usando el método de RK4 exclusivamente, esto es porque tiene el mismo orden de error de AB4-AM4. Esto también tiene una ventaja respecto al procedimiento anterior, los métodos AB1-AM1 hasta AB3-AM3 tienen menor orden de error que AB4-AM4, lo que significa que esos primeros puntos generados tienen mayor error, lo que puede llevar a resultados erróneos si se usa un paso *h* muy grande, por eso también hay que seleccionar un valor apropiado de *h* para reducir el error.

Ejemplo:

Sea: $y' = \dfrac{2x}{y} + x^2 \cdot e^x$, $y(1) = 0$, $1 \le x \le 1{,}5, h = 0{,}1$

Sólo se conoce el punto $(x_0, y_0) = (1; 0)$

1.- Cálculo del punto (x_1, y_1) usando AB1-AM1:

AB1 (Predicción): $y_1^{\mathrm{P}} = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$; $f(x_0, y_0) = 2{,}718282$

$$y_1^{\mathrm{P}} = 0 + (0{,}1) \cdot (2{,}718282) \Rightarrow y_1^{\mathrm{P}} = 0{,}2718282$$

AM1 (Corrección): $y_1^{\mathrm{C}} = y_0 + h \cdot f(x_1, y_1^{\mathrm{P}})$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1 \;;\quad f(x_1, y_1^{\mathrm{P}}) = 4{,}129274$$

$$y_1^{\mathrm{C}} = 0 + (0{,}1) \cdot (4{,}129274) \Rightarrow y_1^{\mathrm{C}} = 0{,}4129274$$

2.- Cálculo del punto (x_2, y_2) usando AB2-AM2:

AB2 (Predicción): $y_2{}^{\mathrm{P}} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot \left[3 \cdot f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)\right]$

$$f(x_1, y_1) = f(1{,}1;\ 0{,}4129274) = 4{,}385818$$

$$y_2{}^{\mathrm{P}} = 0{,}4129274 + \frac{0{,}1}{2} \cdot \left[3 \cdot 4{,}385818 - 2{,}718282\right]$$

$$y_2{}^{\mathrm{P}} = 0{,}934886$$

AM2 (Corrección): $y_2{}^{\mathrm{C}} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_2, y_2{}^{\mathrm{P}}) + f(x_1, y_1)\right]$

$$x_2 = x_1 + h = 1{,}2$$

$$f(x_2, y_2{}^{\mathrm{P}}) = f(1{,}2;\ 0{,}934886) = 6{,}339112$$

$$y_2{}^{\mathrm{C}} = 0{,}412974 + \frac{0{,}1}{2} \cdot \left[6{,}39112 + 4{,}385818\right]$$

$$y_2{}^{\mathrm{C}} = 0{,}949174$$

Como puede verse, los valores corregidos $y_i{}^{\mathrm{C}}$ son los tomados como finales para cada x_i.

3.- Cálculo del punto (x_3, y_3) usando AB3-AM3:

AM3 (Predicción): $y_3{}^{\mathrm{P}} = y_2 + \frac{h}{12} \cdot \left[23 \cdot f(x_2, y_2) - 16 \cdot f(x_1, y_1) + 5 \cdot f(x_0, y_0)\right]$

$$f(x_2, y_2) = f(1{,}2;\ 0{,}949174) = 6{,}362925$$

$$y_3{}^{\mathrm{P}} = 0{,}949174 + \frac{0{,}1}{12} \cdot \left[23 \cdot 6{,}362925 - 16 \cdot 4{,}38818 + 5 \cdot 2{,}718282\right]$$

$$y_3{}^{\mathrm{P}} = 1{,}697220$$

AB3 (Corrección): $y_3{}^{\mathrm{C}} = y_2 + \frac{h}{12} \cdot \left[5 \cdot f(x_3, y_3{}^{\mathrm{P}}) + 8 \bullet f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)\right]$

$$x_3 = x_2 + h = 1{,}3$$

$$f(x_3, y_3{}^{\mathrm{P}}) = f(1{,}3;\ 1{,}697220) = 8{,}812220$$

$$y_3{}^{\mathrm{C}} = 0{,}949174 + \frac{0{,}1}{12} \cdot \left[5 \cdot 8{,}81220 + 8 \cdot 6{,}362925 - 4 \cdot 4{,}385818\right]$$

$$y_3{}^{\mathrm{C}} = 1{,}703996$$

4.- Cálculo del punto (x_4, y_4) usando AB4-AM4:

AM4 (Predicción):

$$y_4^{\mathrm{P}} = y_3 + \frac{h}{24} \cdot \left[55 \cdot f(x_3, y_3) - 59 \cdot f(x_2, y_2) + 37 \cdot f(x_1, y_1) - 9 \cdot f(x_0, y_0) \right]$$

$$f(x_3, y_3) = f(1,3; 1,703996) = 8,822644$$

$$y_4^{\mathrm{P}} = 1,703996 + \frac{0,1}{24} \cdot \left[55 \cdot 8,822644 - 59 \cdot 6,362925 + 37 \cdot 4,385818 - 9 \cdot 2,718282 \right]$$

$$y_4^{\mathrm{P}} = 2,735844$$

AB4 (Corrección):

$$y_4^{\mathrm{C}} = y_3 + \frac{h}{24} \cdot \left[9 \cdot f(x_4, y_4^{\mathrm{P}}) + 19 \cdot f(x_3, y_3) - 5 \cdot f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1) \right]$$

$$x_4 = x_3 + h = 1,4$$

$$f(x_4, y_4^{\mathrm{P}}) = f(1,4; 2,735844) = 11,856541$$

$$y_4^{\mathrm{C}} = 1,703996 + \frac{0,1}{24} \cdot \left[9 \cdot 11,856541 + 19 \cdot 8,822644 - 5 \cdot 6,362925 + 4,385818 \right]$$

$$y_4^{\mathrm{C}} = 2,732789$$

5.- Cálculo del punto (x_5, y_5) usando AB4-AM4:

AB4 (Predicción):

$$y_5^{\mathrm{P}} = y_4 + \frac{h}{24} \cdot \left[55 \cdot f(x_4, y_4) - 59 \cdot f(x_3, y_3) + 37 \cdot f(x_2, y_2) - 9 \cdot f(x_1, y_1) \right]$$

$$f(x_4, y_4) = f(1,4; 2,732789) = 11,852176$$

$$y_5^{\mathrm{P}} = 2,732789 + \frac{0,1}{24} \cdot \left[55 \cdot 11,852176 - 59 \cdot 8,822644 + 37 \cdot 6,362925 - 9 \cdot 4,385818 \right]$$

$$y_5^{\mathrm{P}} = 4,096496$$

AM4 (Corrección):

$$y_5^{\mathrm{C}} = y_4 + \frac{h}{24} \left[9 \cdot f(x_5, y_5^{\mathrm{P}}) + 19 \cdot f(x_4, y_4) - 5 \cdot f(x_3, y_3) + f(x_2, y_2) \right]$$

$$x_5 = x_4 + h = 1,5$$

$$f(x_5, y_5^{\mathrm{P}}) = f(1,5; 4,096496) = 15,545795$$

$$y_5^{\mathrm{C}} = 2,732789 + \frac{0,1}{24} \cdot \left[9 \cdot 15,545795 + 19 \cdot 11,852176 - 5 \cdot 8,822644 + 6,362925 \right]$$

$$y_5^{\mathrm{C}} = 4,096761$$

i	x_i	y_i	$f(x_i,y_i)$	y_{i+1}^P	$f(x_{i+1},y_{i+1}^P)$	y_{i+1}^C
0	1	0	2,718282	0,2718282	4,129274	0,4129274
1	1,1	0,4129274	4,385818	0,934886	6,339112	0,949174
2	1,2	0,949174	6,362925	1,697220	8,812220	1,703996
3	1,3	1,703996	8,822644	2,735844	11,856541	2,732789
4	1,4	2,732789	11,852176	4,096496	15,545795	4,096761
5	1,5	4,096761	-	-	-	-

Si se comparan estos resultados con los de la solución analítica se observan diferencias apreciables en los resultados, esto quiere decir que el valor seleccionado de h = 0,1 es demasiado grande para este método.

La causa de esto está en el hecho de que los primeros cuatro puntos fueron calculados con fórmulas que poseen menores órdenes de error, es decir, errores más grandes y en consecuencia, el error se acumula en los puntos siguientes.

Una forma de solucionar esto es generar los primeros puntos usando RK4 y adicionalmente, usar un valor de *h* más pequeño.